Statistik für Verfahrenstechniker und Chemie-Ingenieure

Jürgen Raasch

unter Mitarbeit von Wulf Alex

2010

Karlsruhe

Ausgabedatum: 9. März 2012

Jürgen Raasch
Am Kirchberg 43
76229 Karlsruhe

juergen.k.raasch@t-online.de

Wulf Alex
Rieslingweg 14
76356 Weingarten (Baden)

alex-weingarten@t-online.de

Das Skriptum ist unvollständig und kann Fehler enthalten. Für Hinweise sind wir dankbar. Skriptum, Korrekturen und Ergänzungen finden sich unter:

`http://www.alex-weingarten.de/skripten/statistik/`

mit den Hyperlinks

- `http://www.alex-weingarten.de/skripten/statistik/buch.pdf`
  (Ganzes Skriptum)
- `http://www.alex-weingarten.de/skripten/statistik/vorwort.pdf`
  (Vorwort)
- `http://www.alex-weingarten.de/skripten/statistik/inhalt.pdf`
  (Inhalt)
- `http://www.alex-weingarten.de/skripten/statistik/probe.pdf`
  (Probeabschnitt)
- `http://www.alex-weingarten.de/skripten/statistik/errata.pdf`
  (Errata)

 Das Skriptum ist folgendermaßen zu zitieren:

Raasch, Jürgen: Statistik für Verfahrenstechniker und Chemieingenieure. Stand 9. März 2012. URL http://www.alex-weingarten.de/skripten/statistik/buch.pdf (Abfragedatum: . . .)

Kapitel 4

Diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilungen

Das Kapitel erläutert einige Wahrscheinlichkeitsverteilungen eines diskreten Merkmals, die in mathematischer oder technischer Hinsicht interessant sind.

4.1 Diskrete Gleichverteilung

Die diskrete **Gleichverteilung** wurde bereits in Abschnitt 3.3.1 *Verteilungen einer Zufallsvariablen* auf Seite 32 behandelt. Ein Beispiel ist die Verteilung der Augenzahlen beim Würfeln. Die Augenzahl nimmt jeden der diskreten Werte von 1 bis 6 mit gleicher Wahrscheinlichkeit an.

4.2 Binomialverteilung

Man erhält die **Binomialverteilung**, wenn man danach fragt, wie oft ein bestimmtes Ereignis A bei wiederholter Ausführung eines Zufallsexperimentes eintrifft, bei dem A bei jeder Ausführung dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt und die Ergebnisse der verschiedenen Ausführungen sich gegenseitig nicht beeinflussen. Ein Beispiel ist das Ziehen aus einer Urne mit Zurücklegen.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A sei bei einmaliger Ausführung des Zufallsexperimentes

$$P(A) = p \tag{4.1}$$

Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass A nicht eintrifft

$$P(\bar{A}) = q \qquad \text{mit} \quad q = 1 - p \tag{4.2}$$

Wir betrachten nun die Zufallsvariable x, die gleich der Anzahl des Eintreffens von A bei n Ausführungen des Zufallsexperimentes ist. Ist $n = 1$, das heißt, wird das Zufallsexperiment nur einmal ausgeführt, so kann x nur die Werte 0 oder 1 annehmen. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind

$$P(0) = P(\bar{A}) = q \qquad P(1) = P(A) = p$$

Ist $n = 2$, so kann x die Werte 0, 1, 2 annehmen. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
P(0) &= P(\bar{\mathrm{A}}\bar{\mathrm{A}}) = P(\bar{\mathrm{A}})\; P(\bar{\mathrm{A}}) = q^2 \\
P(1) &= P(\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}) + P(\bar{\mathrm{A}}\mathrm{A}) = 2P(\mathrm{A})\; P(\bar{\mathrm{A}}) = 2pq \\
P(2) &= P(\mathrm{AA}) = P(\mathrm{A})\; P(\mathrm{A}) = p^2
\end{aligned}$$

Wichtig ist die Feststellung, dass das Ergebnis $x = 1$ auf zweierlei Weise realisiert werden kann und dass die Ereignisse $\mathrm{A}\bar{\mathrm{A}}$ und $\bar{\mathrm{A}}\mathrm{A}$ sich nur durch die Reihenfolge, aber nicht durch die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten unterscheiden. Entsprechende Überlegungen sind anzustellen, wenn das Zufallsexperiment beliebig oft, das heißt n-mal ausgeführt wird.

Fragt man nach der Wahrscheinlichkeit, dass zuerst x-mal das Ereignis A eintrifft und dann $(n-x)$-mal das Ereignis $\bar{\mathrm{A}}$, so ergibt sich

$$P(\underbrace{\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\ldots}_{x\text{-mal}}\underbrace{\bar{\mathrm{A}}\cdot\bar{\mathrm{A}}\cdot\bar{\mathrm{A}}\ldots}_{(n-x)\text{-mal}}) = \Big(P(\mathrm{A})\Big)^x \cdot \Big(P(\bar{\mathrm{A}})\Big)^{n-x} = p^x q^{n-x} \tag{4.3}$$

Das Ereignis *x-maliges Eintreffen des Ereignisses A bei n Realisationen des Zufallsexperimentes* lässt sich nicht nur in dieser, sondern auch in verschiedenen anderen Formen verwirklichen, die sich nur durch die Reihenfolge unterscheiden, in der die Ereignisse A und $\bar{\mathrm{A}}$ eintreten. Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten sind alle durch 4.3 gegeben.

Da sich diese Formen wechselseitig ausschließen, ist die Wahrscheinlichkeit $P(x)$ gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Formen, also gleich dem Produkt von $p^x \cdot q^{n-x}$ und der Anzahl z dieser Formen. Zu fragen ist deshalb, wieviele verschiedene Formen, das heißt wieviele verschiedene Reihenfolgen der Ereignisse A und $\bar{\mathrm{A}}$ bei festgehaltenen Anzahlen x und n möglich sind. Wir zitieren zwei bekannte Sätze der Kombinatorik:

1. Satz: n verschiedene Elemente können auf

$$z = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$$

verschiedene Weisen angeordnet werden oder – anders ausgedrückt – die Anzahl der Permutationen von n verschiedenen Elementen ist z.

2. Satz: Wenn unter n Elementen mehrere Gruppen von n_i unter sich gleichen Elementen existieren, so ist die Anzahl der Permutationen

$$z = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot n_3! \ldots n_k!}$$

wobei gilt

$$\sum_{i=1}^{k} n_i = n \quad \text{und} \quad 0! = 1$$

Die Anzahl der möglichen unterschiedlichen Reihenfolgen der x Ereignisse A und der $(n - x)$ Ereignisse $\bar{\mathrm{A}}$ ergibt sich daraus zu

$$z = \frac{n!}{x!(n-x)!} = \binom{n}{x} \tag{4.4}$$

Dieser Ausdruck wird **Binomialkoeffizient**[1] genannt, weil er bei der Berechnung der Koeffizienten der Potenzen eines Binoms vorkommt (Binomischer Satz)

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}\, y^k$$

Gelesen wird er *n über x* (E: n choose k). Wegen der Fakultäten stößt seine Berechnung schon bei mäßigen Werten von n und x auf praktische Schwierigkeiten. Die Zahl 20! hat bereits 19 Stellen in dezimaler Darstellung. Algorithmen und Rechenprogramme versuchen daher, die Multiplikationen und Divisionen abwechselnd auszuführen, um das Anwachsen der Zwischenergebnisse zu bremsen.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *x-maliges Eintreffen des Ereignisses* A *bei n Realisationen des Zufallsexperimentes* folgt mit 4.4 zu

$$\begin{aligned} P(x) &= \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \\ &= \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x} \quad \text{mit} \quad x = 0, 1, 2 \ldots n \end{aligned} \tag{4.5}$$

Dies ist die **Binomialverteilung**, die wohl wichtigste diskrete Verteilung.

Die Wahrscheinlichkeitssumme über alle x von 0 bis n ergibt sich direkt aus dem Binomischen Satz. Es gilt

$$(p+q)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{k} p^x q^{n-x}$$

Wegen 4.2 folgt daraus

$$\sum_{x=0}^{n} P(x) = 1 \tag{4.6}$$

Um den Erwartungswert der Binomialverteilung zu berechnen, wird von einem Kunstgriff Gebrauch gemacht. Zunächst schreibt man den Binomischen Satz in der abgewandelten Form

$$(pt+q)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} p^x t^x q^{n-x} \tag{4.7}$$

Diese Gleichung wird nun nach t differenziert

$$np\,(pt+q)^{n-1} = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x t^{x-1} q^{n-x} \tag{4.8}$$

[1] siehe die deutsche Wikipedia oder – ausführlicher – die englische

Setzt man danach $t = 1$, so folgt

$$np = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \tag{4.9}$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von 4.9 entspricht vollständig der Definition des Erwartungswertes einer diskreten Variablen. Es ist daher

$$E(x) = \mu_x = np \tag{4.10}$$

Zur Berechnung der Varianz der Binomialverteilung wird 4.7 ein zweites Mal nach t differenziert. Wir erhalten

$$n(n-1)p^2(pt+q)^{n-2} = \sum_{x=0}^{n} x(x-1) \binom{n}{x} p^x t^{x-2} q^{n-x} \tag{4.11}$$

Wird nun $t = 1$ gesetzt, so folgt aus 4.11

$$n(n-1)p^2 = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x} - \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Hierfür können wir schreiben

$$n(n-1)p^2 = \mathrm{E}(x^2) - \mathrm{E}(x)$$

oder nach Umstellen

$$\mathrm{E}(x^2) = n(n-1)p^2 + \mathrm{E}(x) \tag{4.12}$$

Für die Varianz gilt gemäß Abschnitt 3.4.1 *Eindimensionale Wahrscheinlichkeitsverteilungen* auf Seite 44 allgemein

$$\sigma_x^2 = \mathrm{E}(x^2) - \Big(\mathrm{E}(x)\Big)^2$$

Mit 4.10 und 4.12 folgt daraus für die Binomialverteilung

$$\sigma_x^2 = n(n-1)p^2 + np - (np)^2$$

oder

$$\sigma_x^2 = np(1-p) = np\,q \tag{4.13}$$

Beispiel 4.1 : Gegeben seien N Dinge, beispielsweise Schrauben, darunter M unbrauchbare. Die Wahrscheinlichkeit, beim zufälligen Herausgreifen einer Schraube eine unbrauchbare zu erhalten (Ereignis A), ist dann

$$P = \frac{M}{N}$$

Greift man insgesamt n-mal eine einzelne Schraube heraus, nachdem man jeweils die zuvor herausgegriffene zurückgelegt hat, so ist die Wahrscheinlichkeit, dabei genau x unbrauchbare Schrauben zu erhalten, gemäß 4.5

$$P(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

Praktisch wichtiger ist das Ziehen ohne Zurücklegen. Wir werden damit auf die *Hypergeometrische Verteilung* geführt. Solange jedoch die Grundgesamtheit sehr viel größer ist als die gezogene Stichprobe

$$n \ll N$$

sind die Unterschiede zwischen Binomialverteilung und Hypergeometrischer Verteilung gering, und man darf auch das *Ziehen ohne Zurücklegen* mit der Binomialverteilung beschreiben.

Ende Beispiel

Beispiel 4.2 : Wie groß ist in einer Familie mit vier Kindern die Wahrscheinlichkeit

a) zwei Knaben und zwei Mädchen,

b) drei Knaben und ein Mädchen,

c) lauter Knaben

zu finden, wenn wir annehmen, dass Knaben- und Mädchengeburten gleichwahrscheinlich sind und nur durch den Zufall, nicht durch gezielte Eingriffe bestimmt werden? Mit den Bezeichnungen

- Ereignis A = Knabe
- Ereignis $\bar{\text{A}}$ = Mädchen
- Variable x = Anzahl der Knaben unter n Kindern

ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(x)$ aus 4.5, indem wir einsetzen

$$p = q = \frac{1}{2} \text{ und } n = 4$$

Wir finden

$$\begin{aligned} P(x=2) &= \binom{4}{2}(\frac{1}{2})^4 = \frac{3}{8} \\ P(x=3) &= \binom{4}{3}(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{4} \\ P(x=4) &= \binom{4}{4}(\frac{1}{2})^4 = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

Wegen $p = q$ ist die Verteilung symmetrisch. Daher gilt

$$P(x=0) = P(x=4) \text{ und } P(x=1) = P(x=3)$$

Die Wahrscheinlichkeitssumme über alle x ergibt sich zu

$$\sum_{x=0}^{4} P(x) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = 1$$

wie es 4.6 verlangt.

Ende Beispiel

Die **Null-Eins-Verteilung** oder **Bernoulli-Verteilung** ist ein Trivialfall der Binomialverteilung nach 4.5 mit $n = 1$

$$P(x) = \frac{1}{x!(1-x)!}\, p^x q^{1-x} \quad \text{mit} \quad x = 0, 1 \tag{4.14}$$

Aus 4.10 ergibt sich ihr Erwartungswert zu

$$E(x) = p \tag{4.15}$$

und aus 4.13 ihre Varianz zu

$$\sigma_x^2 = pq = p(1-p) \tag{4.16}$$

Beispiele sind das Werfen einer Münze (Zahl–Wappen mit jeweils gleicher Wahrscheinlichkeit), das Werfen eines Würfels, falls wir nur gerade und ungerade Augenzahl unterscheiden oder nur eins und nicht-eins, die Qualitätskontrolle (in Ordnung – nicht in Ordnung, mit hoffentlich ungleichen Wahrscheinlichkeiten) oder Aussagen über Personengruppen (Raucher–Nichtraucher).

4.3 Poisson-Verteilung

Die **Poisson-Verteilung** lässt sich als Näherung der Binomialverteilung für den Fall ableiten, dass die Wahrscheinlichkeit p für das Eintreten des Ereignisses A sehr klein, A also ein seltenes Ereignis ist, während die Anzahl n der Ausführungen des Zufallsexperimentes sehr groß ist. Sie wurde erstmals von dem französischen Physiker und Mathematiker Siméon-Denis Poisson (1781–1840) beschrieben, war jedoch schon vorher bekannt.

Wir gehen aus von der Binomialverteilung 4.5

$$P(x) = \frac{n!}{x!(n-x)!}\, p^x q^{n-x} \tag{4.17}$$

und verwenden die Formel von James Stirling (1692–1770) für Näherungswerte der Fakultät großer Zahlen

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, (\frac{n}{\mathrm{e}})^n \tag{4.18}$$

mit e als der Basis der natürlichen Logarithmen (Eulersche Zahl, e = 2,718...). Die Näherung ist umso besser, je größer die Zahl n ist. Die Abweichungen vom genauen Wert sind kleiner als 1 %, falls $n \geq 10$ ist. Eine verbesserte Näherung – brauchbar ab $n = 2$ – liefert die modifizierte Formel[2]

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\,(\frac{n}{\mathrm{e}})^n \left(1 + \frac{1}{12\,n}\right)$$

Tabelle 4.1 zeigt die exakten Werte, die Werte der einfachen und der verbesserten Näherung von J. Stirling sowie in der letzten Spalte den relativen Fehler der einfachen Näherung.

Tab. 4.1: Fakultäten; exakte Werte, einfache und verbesserte Näherung nach J. Stirling sowie relativer Fehler der einfachen Näherung

n	Fakultät	Stirling	Stirling verb.	Fehler
1	1	0.92	1.00	-0.077863
2	2	1.92	2.00	-0.040498
3	6	5.84	6.00	-0.027299
4	24	23.51	24.00	-0.020576
5	120	118.02	119.99	-0.016507
6	720	710.08	719.94	-0.013781
7	5040	4980.39	5039.68	-0.011827
8	40320	39902.38	40318.03	-0.010358
9	362880	359536.69	362865.73	-0.009213
10	3628800	3598693.55	3628682.66	-0.008297

Wenn, wie weiterhin vorausgesetzt, $p \ll 1$, $x \ll n$ und $n \gg 1$ gilt, lässt sich die Formel von Stirling dazu benutzen, die beiden Ausdrücke $n!$ und $(n-x)!$ in 4.17 zu eliminieren. Wir erhalten

$$P(x) \approx \frac{(np)^x \mathrm{e}^{-x}}{x!} \, \frac{(1-p)^{n-x}}{(1-\frac{x}{n})^{n-x}} \sqrt{\frac{n}{n-x}} \tag{4.19}$$

Der zweite und dritte Faktor lassen sich unter den genannten Voraussetzungen erheblich vereinfachen. Es gilt

$$\begin{aligned} \ln{(1-p)^{n-x}} &= (n-x)\ln{(1-p)} \\ &= (n-x)(-p - \frac{p^2}{2} - \frac{p^3}{3} - \ldots) \\ &\approx -np \end{aligned}$$

woraus folgt

$$(1-p)^{n-x} \approx \exp{(-np)} \tag{4.20}$$

[2]siehe `http://algolist.manual.ru/count_fast/gamma_function.php` oder D. E. Knuth, Band I

Ebenso ergibt sich

$$(1 - \frac{x}{n})^{n-x} \approx \exp(-x) \tag{4.21}$$

und

$$\sqrt{\frac{n}{n-x}} \approx 1 \tag{4.22}$$

Setzt man 4.20, 4.21 und 4.22 in 4.19 ein, so folgt

$$P(x) \approx \frac{(np)^x}{x!} \exp(-np) \quad \text{mit} \quad x = 0, 1, 2, \ldots n \tag{4.23}$$

Wir betrachten nun den Grenzfall, dass p gegen null geht und n gegen unendlich, wobei jedoch das Produkt

$$\mu_x = np \tag{4.24}$$

einen endlichen Wert behält. Für diesen Grenzfall folgt aus 4.23

$$P(x) = \frac{\mu_x^x}{x!} \exp(-\mu_x) \quad \text{mit} \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.25}$$

Dies ist die **Poisson-Verteilung**. Sie ist eine eindimensionale diskrete Verteilung, die sich dadurch von der Binomialverteilung unterscheidet, dass die Variable x abzählbar unendlich viele Werte annimmt.

Die Wahrscheinlichkeitssumme über alle x erhält man, wenn man für die Exponentialfunktion folgende Reihenentwicklung verwendet

$$\exp z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{31} + \ldots$$

Hieraus folgt

$$\sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu_x^x}{x!} = \exp(\mu_x)$$

und damit für die Wahrscheinlichkeitssumme

$$\sum_{x=0}^{\infty} P(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\mu_x^x}{x!} \exp(-\mu_x) = 1 \tag{4.26}$$

Für den Mittelwert finden wir

$$\begin{aligned} E(x) &= \sum_{x=0}^{\infty} x \, \frac{\mu_x^x}{x!} \, \exp(-\mu_x) \\ &= \mu_x \, \exp(-\mu_x) \, \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu_x^{x-1}}{(x-1)!} \\ &= \mu_x \end{aligned} \tag{4.27}$$

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned}
E(x^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \frac{\mu_x^x}{x!} \exp(-\mu_x) \\
&= \mu_x \exp(-\mu_x) \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\mu_x^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \mu_x \exp(-\mu_x) \sum_{x=1}^{\infty} ((x-1)+1) \frac{\mu_x^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \mu_x^2 \exp(-\mu_x) \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\mu_x^{x-2}}{(x-2)!} + \mu_x \exp(-\mu_x) \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\mu_x^{x-1}}{(x-1)!} \\
&= \mu_x^2 + \mu_x \qquad (4.28)
\end{aligned}$$

Mit der allgemeinen Beziehung für die Varianz (3.94 auf Seite 47)

$$\sigma_x^2 = E(x^2) - (E(x))^2$$

ergibt sich schließlich

$$\sigma_x^2 = \mu_x^2 + \mu_x - \mu_x^2 = \mu_x \qquad (4.29)$$

Mittelwert und Varianz der Poisson-Verteilung sind gleich. Man bezeichnet deshalb die Poisson-Verteilung als eine einparametrige Verteilung mit dem einzigen Parameter $\mu_x = \sigma_x^2$.

Es ist vorteilhaft, die Binomialverteilung unter den oben genannten Voraussetzungen durch die Poisson-Verteilung anzunähern, weil das Rechnen mit der Binomialverteilung für große Anzahlen n mühsam wird.

Beispiel 4.3 : Gefragt sei nach der Wahrscheinlichkeit, dass in einem Dorf mit 500 Einwohnern wenigstens einer am 24. Dezember Geburtstag hat. Man geht aus von der Annahme, dass die Geburtstage der Dorfbewohner zufällig über alle Tage des Jahres verteilt sind, und definiert

- Ereignis A = Ein einzeln herausgegriffener Dorfbewohner hat am 24. Dezember Geburtstag,
- Variable x = Anzahl derjenigen unter den $n = 500$ Dorfbewohnern, die am 24. Dezember Geburtstag haben.

Dann ist, wenn man Schaltjahre außer Acht lässt

$$P(\mathrm{A}) = p = \frac{1}{365} \qquad P(\bar{\mathrm{A}}) = q = \frac{364}{365} \qquad n = 500$$

Die exakte Lösung erhält man mit der Binomialverteilung nach 4.5. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist

$$\begin{aligned} P(x \geq 1) &= 1 - P(x = 0) \\ &= 1 - \binom{500}{0} p^0 q^{500} \\ &= 1 - (\frac{364}{365})^{500} = 1 - 0,2537 = 0,7463 \end{aligned}$$

Die Näherungslösung bei Verwendung der Poisson-Verteilung 4.25 liefert

$$P(x \geq 1) = 1 - P(x = 0) = 1 - \frac{\mu_x^0}{0!} \exp(-\mu_x)$$

Mit dem Mittelwert

$$\mu_x = np = \frac{500}{365}$$

folgt

$$P(x \geq 1) = 1 - 0,2541 = 0,7459$$

Hier ist der Vorteil noch nicht erkennbar, den die Verwendung der Poisson-Verteilung anstelle der Binomialverteilung bietet. Dieser wird er jedoch deutlich, wenn etwa nach der Wahrscheinlichkeit $P(5 \geq x \geq 1)$ gefragt ist.

Ende Beispiel

Die Poisson-Verteilung lässt sich auch ohne Bezug auf die Binomialverteilung herleiten, wenn man von folgender Modellvorstellung ausgeht. Es werden Ereignisse beobachtet, die in zufälliger zeitlicher Folge eintreten. Dabei soll gelten

- Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses im Zeitintervall von t bis $t + \Delta t$ ist unabhängig davon, was im Zeitraum t geschehen ist.
- Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten genau eines Ereignisses im Zeitintervall Δt ist der Länge des Zeitintervalls proportional.
- Das Zeitintervall Δt wird so klein gewählt, dass immer höchstens ein Ereignis in das Zeitintervall fällt.

Die Anzahl x der Ereignisse, die im Zeitraum t beobachtet werden, ist eine Zufallsvariable, deren Wahrscheinlichkeit mit $P(x; t)$ bezeichnet werden soll.

Entsprechend dieser Festlegung ist $P(1; \Delta t)$ die Wahrscheinlichkeit, dass im Zeitintervall Δt genau ein Ereignis eintritt. Es gilt

$$P(1; \Delta t) = \lambda \, \Delta t \tag{4.30}$$

worin λ die mittlere Anzahl der Ereignisse in der Zeiteinheit bedeutet. Ist Δt so klein gewählt worden, dass in Δt höchstens ein Ereignis eintreten kann, so ist

$$P(0; \Delta t) + P(1; \Delta t) = 1$$

Mit 4.30 folgt

$$P(0; \Delta t) = 1 - \lambda\, \Delta t \tag{4.31}$$

Sind im Zeitraum $t + \Delta t$ genau x Ereignisse eingetreten, so kann dies nur auf zweierlei Weise geschehen sein:

- im Zeitraum t genau x Ereignisse, im Zeitintervall Δt kein Ereignis,
- im Zeitraum t genau $x - 1$ Ereignisse, im Zeitintervall Δt ein Ereignis.

Für die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten gilt, da Unabhängigkeit vorausgesetzt wurde und die beiden genannten Möglichkeiten als sich wechselseitig ausschließende Ereignisse anzusehen sind

$$P(x; t + \Delta t) = P(x; t)\ P(0; \Delta t) + P(x - 1; t)\ P(1; \Delta t)$$

Mit 4.30 und 4.31 folgt daraus

$$P(x; t + \Delta t) = P(x; t)\ (1 - \lambda\, \Delta t) + P(x - 1; t)\ \lambda\, \Delta t$$

oder

$$\frac{P(x; t + \Delta t) - P(x; t)}{\Delta t} = \lambda(P(x - 1; t) - P(x; t))$$

Macht man das Zeitintervall Δt sehr klein im Vergleich zu t, so darf man den Differenzenquotienten durch den Differentialquotienten ersetzen und erhält

$$\frac{\mathrm{d}P(x; t)}{\mathrm{d}t} + \lambda\ P(x; t) = \lambda\ P(x - 1; t) \tag{4.32}$$

Die Differentialgleichung 4.32 ist rekursiv zu lösen. Man beginnt mit dem unmöglichen Ereignis $x = -1$ und setzt

$$P(-1; t) = 0$$

Dann folgt aus 4.32 für $x = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}P(0; t)}{\mathrm{d}t} + \lambda P(0; t) = 0$$

und weiter

$$P(0; t) = c_0\ \exp(-\lambda t)$$

Für $t \to 0$ muss diese Wahrscheinlichkeit gegen 1 gehen (sicheres Ereignis). Daher ist $c_0 = 1$ und

$$P(0; 1) = \exp(-\lambda t)$$

Für $t = 1$ ergibt sich hiermit

$$\frac{\mathrm{d}P(1; t)}{\mathrm{d}t} + \lambda P(1; t) = \lambda\ \exp(-\lambda t)$$

Die Lösung dieser einfachen Differentialgleichung ist

$$P(1;t) = \lambda t \exp(-\lambda t)$$

Für $x = 2$ erhält man damit die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}P(2;t)}{\mathrm{d}t} + \lambda P(2;t) = \lambda(\lambda t)\ \exp(-\lambda t)$$

mit der Lösung

$$P(2;t) = \frac{(\lambda t)^2}{2}\ \exp(-\lambda t)$$

Die Lösung für beliebige x lautet

$$P(x;t) = \frac{(\lambda t)^x}{x!} \exp(-\lambda t) \quad \text{mit} \quad x = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.33}$$

Den Beweis führt man durch vollständige Induktion.

Ist t ein vorgegebener konstanter Zeitraum, so ist 4.33, wie der Vergleich mit 4.25 zeigt, mit der Poisson-Verteilung identisch, und x hat den Mittelwert

$$\mu_x = \lambda t \tag{4.34}$$

Ein Prozess, der sehr genau dem Modell entspricht, das der Herleitung von 4.33 zugrunde liegt, ist der radioaktive Zerfall eines instabilen Isotops. Die Anzahl N der innerhalb eines Zeitraumes t ausgesandten Gammaquanten beispielsweise einer Cs-137-Quelle folgt deshalb einer Poisson-Verteilung, und es gilt entsprechend 4.29 auf Seite 71

$$\mu_N = \sigma_N^2$$

Außer dem radioaktiven Zerfall gibt es in Wissenschaft und Technik noch viele andere Vorgänge, die dadurch gekennzeichnet sind, dass irgendwelche Ereignisse in zufälliger zeitlicher Folge eintreten. In allen diesen Fällen liefert die Poisson-Verteilung eine exakte Beschreibung.

Wenn man anstelle des Zeitraums t eine Strecke s, eine Fläche F oder ein Volumen V betrachtet, über die bestimmte Dinge (Ereignisse) zufällig verteilt sind, so kann man dasselbe Modell auch auf diese Fälle anwenden. Die Konstante λ in 4.33 bedeutet dann die mittlere Anzahl der Dinge (Ereignisse) in der Strecken-, Flächen- oder Volumeneinheit.